数理解析研究所講究録
986 巻 1997 年 118-126

一変数多項式の因子分離法と重根・近接根問題への応用[1)]

尾崎 裕一 (筑波大学大学院 理工学研究科)
佐々木 建昭 (筑波大学 数学系 & ベンチャービジネスラボ)
(Yu-ichi Ozaki and Tateaki Sasaki)

Abstract. 一変数多項式 $F(x)$ とその近似因子 $G_0(x)$, $H_0(x)$ が $F(x)=G_0(x)H_0(x)+\delta F_0(x)$, $\|\delta F_0(x)\| \ll \|F(x)\|$ を満たす形で与えられたとき、$F(x)=G_1(x)H_1(x)+\delta F_1(x)$, $|\delta F_1(x)\| \ll \|\delta F_0(x)\|$ となる多項式 $G_1(x)$, $H_1(x)$ を計算することを因子分離という。本稿では計算代数で著名な Hensel 構成を近似化した立場から因子分離を行う逐次近似算式を導出し、得られた逐次近似算式の収束性について述べる。因子分離法は非常に基礎的な演算で、その構成の簡単さゆえ種々の応用がある。一つの応用として一変数多項式から重根・近接根因子を精度よく分離する方法について述べる。

0. はじめに

近年、浮動小数係数多項式のように、誤差項を含む多項式や有理式に対する代数的演算、すなわち近似的代数算法 (いわゆる近似代数) が世界的に大きな注目を集めている [1,2,3]。これまでの研究は、近似 GCD や近似因数分解など、計算代数からのアプローチが多かったが、最近は数値解析の立場からの研究も現れている。本稿に述べる因子分離の算法と応用は、計算代数と数値解析の両者にかかわるものである

一変数多項式 $F(x)$ とその近似因子 $G_0(x)$, $H_0(x)$ が $F(x)=G_0(x)H_0(x)+\delta F_0(x)$, $\|\delta F_0(x)\| \ll \|F(x)\|$ を満たす形で与えられたとき、$F(x)=G_1(x)H_1(x)+\delta F_1(x)$, $\|\delta F_1(x)\| \ll \|\delta F_0(x)\|$ となる多項式 $G_1(x)$, $H_1(x)$ を計算することを、我々は**因子分離** (*factor separation*) と名付ける。これは文献 [4] でも扱われたテーマであるが、文献 [4] が有理 Hermite 補間から出発するのに対し、本稿では計算代数で著名な Hensel 構成を近似化した立場から因子分離を行う逐次近似算式を導出する。

厳密な代数演算では中間式膨張による計算量増大などの問題はあっても、アルゴリズムが不安定になることはない。ところが浮動小数演算を用いる近似的代数算法では、桁落ちなどのためアルゴリズムが不安定となり、時として解が求まらない場合がある。そこで、2. 章の後半では反復算法の収束条件と収束次数を解明する。

因子分離法は簡単でありながら強力なので、種々の応用があると考えられる。本稿では一変数代数方程式の重根・近接根問題への応用を述べる。よく知られているように、代数方程式を数値的に解くと、重根と近接根は非常に悪い精度でしか計算できない。その場合

1) 本研究は部分的に文部省科研費（課題番号 06558037）およびベンチャービジネスラボの援助を受けた。

には、与式から重根・近接根因子を分離して、それだけを別に扱うとよいだろう。この分離に因子分離法を用いるのだが、そのためには初期因子を与えなければならない。3. 章ではこの初期因子を決めるための二通りの方法を呈示する。そして、いくつかの数値例により、因子分離法が有効に働くことを確認する。最後に 4. 章では今後の課題について記す。

1. 用語と記法

定義 [**多項式のノルム**] 多項式 P に対し、その数係数のうち絶対値最大のものを P のノルムと定め $\|P\|$ と表す。

定義 [**正常多項式** (regular polynomial)] 多項式 P の主係数 $\mathrm{lc}(P)$ が $|\mathrm{lc}(P)| \simeq \|P\|$ であるとき、P は正常多項式であるという。

定義 [O **記号**] 二つの数 g と h が "同じ程度" の大きさの数であるとき $g = O(h)$ と表す。ここで、"同じ程度" の意味があいまいだが、我々は常に O 記号を与えられた多項式に関連づけて、以下のように用いる。すなわち、多項式 P と Q に対し、「積 PQ のノルムは O 記号の意味で $O(\|P\|\|Q\|)$ を越えず、通常は $O(\|P\|\|Q\|)$ となる。」というように O 記号を定める。P と Q が特殊な多項式のときは $\|PQ\| \ll O(\|P\|\|Q\|)$ となる。

定義 [**近接根**] 多項式 $P(x)$ の根 a_1 と a_2 が微小な正の数 ε に対して $|a_1 - a_2| \simeq \varepsilon$ であるとき a_1 と a_2 は近接度 ε 程度の近接根であるという。また、多項式 P と Q が共通根のみならず互いに共通な近接根ももたないとき P と Q は**近似的に互いに素**であるという。

定義 [**近似無平方分解** (approximate square-free decomposition)] ノルムが 1 に規格化された多項式 $P(x)$ と微小な正の数 ε が与えられたとき、$P(x)$ を次式のように分解することを**精度** ε **の近似無平方分解**という。

$$P(x) = Q_1(x)Q_2^2(x)\cdots Q_l^l(x) + \delta P(x) \quad \|\delta P(x)\| \le \varepsilon \tag{1}$$

ここで、$Q_m(x)$ は無平方な多項式で、$P(x)$ の全ての (近接根も重根とみなして) m 重因子を含む。

注 文献 [5] で述べられているように、P が正常多項式の場合は、近接根の平均近接度を δ とするとき、$\varepsilon = O(\delta^2)$ とすれば近接度 δ 以下の近接根は重根とみなされる。

2. 因子分離法

2.1. 反復公式

$F(x) = G(x)H(x)$ なる 1 変数多項式 $F(x)$ が与えられたとする。真の因子 $G(x)$ と $H(x)$ は未知だが、近似因子 $G_0(x)(\simeq G(x))$ と $H_0(x)(\simeq H(x))$ が分かっているとき、より精度

の高い近似因子 $G_1(x)$ と $H_1(x)$ を求めることを考える。ただし、$G_0(x)$ と $H_0(x)$ は正常で近似的に互いに素であるとする。

$$\begin{gathered} G = G_0 + \delta G, \quad H = H_0 + \delta H \\ \text{ただし} \quad \|\delta G\|, \|\delta H\| = O(\varepsilon), \quad \varepsilon \ll 1 \end{gathered} \tag{2}$$

$\delta F = F - G_0 H_0$ とすると、

$$\begin{aligned} \delta F &= F - G_0 H_0 \\ &= (G_0 + \delta G)(H_0 + \delta H) - G_0 H_0 \\ &= \delta H G_0 + \delta G H_0 + \delta G \delta H \end{aligned} \tag{3}$$

$\|\delta F\| = O(\varepsilon)$, $\|\delta G \delta H\| = O(\varepsilon^2)$ であるから、以下の式を u と v について解くことにより δG と δH を $O(\varepsilon^2)$ の精度で決定できる。

$$\delta F = u G_0 + v H_0 \tag{4}$$

(4) 式を満たす u と v は一般には一意には定まらないが、G_0 と H_0 が互いに素ならば拡張された Euclid の互除法を用いて計算することができる。さらに G_0 と H_0 の主項をそれぞれ G と H の主項に一致するように定めれば、$\deg(\delta F) < \deg(G_i H_i)$ であるから、以下の次数条件を課すことができて、(4) 式を満たす u と v は一意に定まる。

$$\deg(v) < \deg(G_0), \quad \deg(u) < \deg(H_0) \tag{5}$$

$G_1 = G_0 + v$, $H_1 = H_0 + u$ とおけば $\|F - G_1 H_1\| = O(\varepsilon^2)$ である。

上記の手順を反復して適用すれば、任意に高い精度で G と H を近似する多項式 G_i と H_i を得る。

2.2. 収束条件

上記反復公式の収束性について述べる。前節の反復公式において、G_i と H_i を第 i 次近似因子、u_i と v_i を第 i 次の修正量とする。G_i, H_i とそれらの真の因子 G, H との誤差をそれぞれ $\delta G_i = G - G_i$, $\delta H_i = H - H_i$ とすると

$$\begin{aligned} \delta F_i &= GH - G_i H_i \\ &= \delta H_i G_i + \delta G_i H_i + \delta G_i \delta H_i \end{aligned} \tag{6}$$

ここで$\delta F_i = u_i G_i + v_i H_i$ であり、また第 $i+1$ 次の誤差はそれぞれ $\delta G_{i+1} = \delta G_i - v_i$, $\delta H_{i+1} = \delta H_i - u_i$ と表せるから、第 i 次の誤差と第 $i+1$ 次の誤差について以下の関係を得る。

$$\begin{aligned} -\delta G_i \delta H_i &= \delta H_i G_i + \delta G_i H_i - \delta F_i \\ &= (\delta H_i - u_i) G_i + (\delta G_i - v_i) H_i \\ &= \delta H_{i+1} G_i + \delta G_{i+1} H_i \end{aligned} \tag{7}$$

一方、 G_i と H_i から生成される多項式剰余列 $(P_3, \ldots, P_{k_i})$ に対して、

$$\begin{gathered} A_jG_i + B_jH_i = P_j \\ \deg(A_j) < \deg(H_i) - \deg(P_j), \quad \deg(B_j) < \deg(G_i) - \deg(P_j) \end{gathered} \tag{8}$$

となる A_j と B_j が存在する。ただし、各 P_j は $\max(\|A_j\|, \|B_j\|) = 1$ となるように規格化されているものとする。G_i と H_i が互いに素ならば、ある k_i に対して $\deg(P_{k_i}) = 0$ ゆえ、 $\delta G_i \delta H_i$ は G_i と H_i によって以下のように表せる。

$$\delta G_i \delta H_i = (\delta G_i \delta H_i A_{k_i} / P_{k_i}) G_i + (\delta G_i \delta H_i B_{k_i} / P_{k_i}) H_i \tag{9}$$

$\deg(\delta G_{i+1}) < \deg(G_i)$, $\deg(\delta H_{i+1}) < \deg(H_i)$ であるから、Euclid の互除法の一意性より

$$\delta G_{i+1} = \mathrm{rem}(-\delta G_i \delta H_i B_{k_i} / P_{k_i}, G_i), \quad \delta H_{i+1} = \mathrm{rem}(-\delta G_i \delta H_i A_{k_i} / P_{k_i}, H_i) \tag{10}$$

である。ここで、$\max(\|A_{k_i}\|, \|B_{k_i}\|) = 1$ としたから、$\|\delta G_{i+1}\|$ と $\|\delta H_{i+1}\|$ は以下のように評価できる。

$$\max(\|\delta G_{i+1}\|, \|\delta H_{i+1}\|) \le C \|\delta G_i\| \|\delta H_i\| / |P_{k_i}| \tag{11}$$

ここで C は F と G の次数にのみ依存する定数である。したがって $\|\delta G_{i+1}\| < \|\delta G_i\|$ となるためには下式が成立すればよい。

$$\begin{aligned} \frac{\|\delta G_{i+1}\|}{\|\delta G_i\|} &\le \frac{C \|\delta G_i\| \|\delta H_i\| / |P_{k_i}|}{\|\delta G_i\|} \\ &= C \|\delta H_i\| / |P_{k_i}| \ < \ 1 \end{aligned} \tag{12}$$

$\|\delta H_{i+1}\|$ についても同様だから、各 i について $C\|\delta G_i\| < |P_{k_i}|$ かつ $C\|\delta H_i\| < |P_{k_i}|$ が成立するならば、多項式の列 G_i, H_i $(i = 1, 2, \cdots)$ はそれぞれ G, H に収束する。

高次の多項式に対しては C の値は極めて大きくなるため、多くの場合 (11) 式は過大な見積りであって実際には下式程度の見積りで十分である。

$$\max(\|\delta G_{i+1}\|, \|\delta H_{i+1}\|) = O(\|\delta G_i\| \|\delta H_i\| / |P_{k_i}|) \tag{13}$$

高次の多項式に対しては、多項式剰余列の計算の際に生じる桁落ちにより P_{k_i} の計算が困難になることの方がより深刻な問題といえる。P_{k_i} の値は G_i と H_i の共通の近接根の有無によって決まることが分かっている。すなわち、G_i と H_i が近接度 δ 程度の共通の近接根をもつ場合、$|P_{k_i}| = O(\delta)$ である。

2.3. 収束次数

G と H は近似的に互いに素で $G_i \simeq G$, $H_i \simeq H$ と仮定したから、 G_i と H_i も近似的に互いに素であると考えてよい。また、多項式 A, B と P_k (=const.) を

$$\begin{gathered} AG + BH = P_k \\ \deg(A) < \deg(H), \ \deg(B) < \deg(G) \quad \max(\|A\|, \|B\|) = 1 \end{gathered} \tag{14}$$

と定めるならば、$P_{k_i} \simeq P_k$ となる。このとき、

$$\begin{aligned}\frac{\max(\|\delta G_{i+1}\|, \|\delta H_{i+1}\|)}{\max(\|\delta G_i\|, \|\delta H_i\|)^2} &\le \frac{C\|\delta G_i\|\|\delta H_i\|/P_{k_i}}{\max(\|\delta G_i\|, \|\delta H_i\|)^2} \\ &\le \frac{C}{\|P_{k_i}\|} \simeq \frac{C}{\|P_k\|} \qquad (15)\end{aligned}$$

であるから上記反復公式は2次収束することが分かる。

2.4. 分離した因子の精度と停止条件

上記反復公式では $\delta F_i = F - G_i H_i$ のノルムが十分小さくなった時点で反復を終了する。このとき G_i と H_i が互いに近接する根をもたなければ (6) 式より $\|\delta F_i\| \simeq \max(\|\delta G_i\|, \|\delta H_i\|)$ となり、精度よく分離できる。ところが G_i と H_i が互いに近接する根をもっている場合、$|P_{k_i}| \ll 1$ となり (6) 式の右辺で $\delta H_i G_i$ と$\delta G_i H_i$ の間でキャンセルが生じ、$\|\delta F_i\| \simeq |P_{k_i}| \times \max(\|\delta G_i\|, \|\delta H_i\|)$ となる。すなわち G_i と H_i の係数部は $\varepsilon_M \,/\, |P_{k_i}|$ 程度の精度でしか決まらない。しかし、この場合 $\|\delta F_i\| \simeq O(\varepsilon_M)$ なのだから、G_i と H_i は F の“可能な限り”高い精度の近似因子といえる。

よって $\|\delta F_i\|$ の値をもって反復公式の停止条件とするのが妥当であろう。分離した因子の精度が悪化するのは初期因子の選び方が適当でないからである。

3. 重根と近接根の分離法

1変数代数方程式が m 重根あるいは m 重近接根をもつ場合、マシンイプシロン ε_M の精度で数値的に計算すると、これらの根は $\sqrt[m]{\varepsilon_M}$ の精度までしか計算できない。なぜなら $P(x) = (x-\alpha)^m Q(x)$ の場合には $P(\alpha+\delta) = \delta^m Q(\alpha+\delta)$ ゆえ、$|\delta| \lesssim \sqrt[m]{\varepsilon_M}$ に対して $P(\alpha+\delta)$ の数値評価の際に桁落ちで全ての有効数字が失われるからである。したがって、根を精度よく計算できないことは原理的な難点であるといえる。しかしながら $(x-\alpha)^m$ 因子を全体としてみると、これは精度よく分離できる [7]。

上述の因子分離法によると、重根・近接根因子に対応する初期多項式が与えられれば、その因子を精度よく分離することができる。そこで初期多項式をいかに与えるかが問題だが、本稿では次の二通りの方法を述べる。

3.1. 近似無平方分解を利用する方法

因子分離法の初期因子は近似無平方分解により計算できる。正常な多項式 $P(x)$ に対して精度 δ で近似無平方分解を行うと、

$$P(x) = Q_1(x) Q_2^2(x) \cdots Q_l^l(x) + \delta P(x) \qquad \|\delta P(x)\| \le O(\delta^2)$$

を満たす $Q_1(x), \ldots, Q_l(x)$ がえられる。ここで、各 $Q_i^i(x)$ $(i = 1, \ldots, l)$ は近接度 δ 以下の近接根を重根とみなして i 重根を全て含んだ近似因子である。$Q_i(x)$ は無平方でその根は互いに δ 程度以上離れているから Durand-Kerner 法等を用いて容易に $Q_i(x)$ の根 $u_{i,j}$ $(j = 1, \ldots, m_i)$ を計算することができる。$u_{i,j}$ は $P(x)$ の近似 i 重根だから $(x - u_{i,j})^i$ は $u_{i,j}$ のδ 近傍の根を全て含む近似因子であって、その精度は $O(\delta^2)$ 程度である。また、

$(x-u_{i,j})^i$ と $P(x)/(x-u_{i,j})^i$ は近接度 δ 以下の互いに共通な近接根をもたないから互いに素である。よって、$(x-u_{i,j})^i$ と $P(x)/(x-u_{i,j})^i$ を初期因子とすればよい。

3.2. 数値例

乱数で区間 $(-1,1)$ の範囲で１５個の実数 $a_1,\ldots,a_{15}$ を生成し、これらを根とする１５次の多項式を $P(x)$ とする。

$$P=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_{15})$$

$$\begin{array}{lll} a_1=0.906978, & a_6=0.075609, & a_{11}=-0.517318, \\ a_2=0.738607, & a_7=-0.091147, & a_{12}=-0.552766, \\ a_3=0.640075, & a_8=-0.332034, & a_{13}=-0.784881, \\ a_4=0.506494, & a_9=-0.335729, & a_{14}=-0.92664, \\ a_5=0.232769, & a_{10}=-0.346839, & a_{15}=-0.97263. \end{array} \tag{16}$$

P に対して近似無平方分解を行うと次の Q_3 と Q_1 が得られる。

$$\begin{aligned} Q_3 &= x+0.3433117570824 \\ Q_1 &= x^{12}+0.72951672875281x^{11}-2.2768896449443x^{10}-1.4745190326655x^9 \\ &\quad +1.9526688106761x^8+1.0520800448672x^7-0.78593426196072x^6 \\ &\quad -0.31528372577108x^5+0.14746174585131x^4+0.03444041818503x^3 \\ &\quad -0.0104776477942184x^2-0.00030686537793658x+0.000050067094332961 \end{aligned}$$

(16) をみると Q_3 は a_8,a_9,a_{10} を近似していることがわかる。これをもとにして、次のように G_0 と H_0 を定める。

$$G_0={Q_3}^3, \quad H_0=P/G_0$$

G_0 と H_0 を初期因子として分離精度 1.0×10^{-13} で因子分離を行うと反復は５回で停止し、G_5 と H_5 は次のようになる。

$$\begin{aligned} G_5 &= x^3+1.014602x^2+0.34307969394299x+0.038663337422453 \\ H_5 &= x^{12}+0.74485000000001x^{11}-2.270831553243x^{10}+\cdots \end{aligned}$$

得られた因子の精度を調べてみると

$$\|(x-a_8)(x-a_9)(x-a_{10})-G_5\|=9.9920072216264\times10^{-15}$$

であるから十分な精度で近接根因子を分離できたことがわかる。

次に精度良く分離できなかった例を示す。前の例と同様に

$$P=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_{15})$$

$$\begin{aligned} &a_1 = 0.580397, && a_6 = 0.090934, && a_{11} = -0.68825, \\ &a_2 = 0.514122, && a_7 = -0.163329, && a_{12} = -0.703934, \\ &a_3 = 0.496965, && a_8 = -0.190935, && a_{13} = -0.733996, \\ &a_4 = 0.399967, && a_9 = -0.451888, && a_{14} = -0.74046, \\ &a_5 = 0.226436, && a_{10} = -0.655015, && a_{15} = -0.766936. \end{aligned} \tag{17}$$

とし、近似無平方分解により初期因子 G_0 と H_0 を定める。

$$Q_3 = x + 0.71581397514413$$
$$Q_1 = x^{12} + 0.63848007456761x^{11} - 1.231418428669x^{10} + \cdots$$

$$G_0 = {Q_3}^3, \quad H_0 = P/G_0$$

分離精度 1.0×10^{-13} で因子分離を行うと、反復は 8 回で停止し G_8 は次のようになる。

$$G_8 = x^3 + 2.17838999989548x^2 + 1.5814143865241x + 0.38258438220795$$

$$\|P - G_8H_8\| = 4.6629367034257 \times 10^{-14}$$

Q_3 の根 -0.71581397514413 に最も近い 3 つの根は a_{12}, a_{13}, a_{14} だから、得られた因子の精度を調べてみると

$$\|(x - a_{12})(x - a_{13})(x - a_{14}) - G_8\| = 1.5398997632587 \times 10^{-9}$$

となり精度が良くないことがわかる。これは (17) をみるとわかるように、 a_{10} から a_{15} まではかなり近接しているのに、これらが G_0 と H_0 に振り分けられてしまい §2.4. で述べたような状況が生じたためである。この場合の (14) 式の P_k の値は 0.000010397632074083 4 である。

同様な実験を 1000 個の多項式に対して行ったところ次のような結果を得た。なお、20 回反復しても収束しなかったり、桁落ちのため計算不可能になった場合は分離不可とした。

	因子の精度	個数	P_k の平均値
重根なし		524	
重根あり	誤差 $< 1.0 \times 10^{-13}$	302	0.000006866585464499
	誤差 $> 1.0 \times 10^{-13}$	165	0.0000003915052846767 8
	分離不可	9	0.0000007880576192197 7

3.3. Smith の誤差上界の利用

一変数代数方程式の数値解の誤差に対しては Smith により得られた誤差上界がよく知られている [8]。Durand-Kerner の 2 次法で代数方程式を数値的に解いた場合、i 番目の根に対する補正量を δx_i とすれば、大雑把に言ってその根に対する誤差上界 = 重複度 $\times|\delta x_i|$ となる。したがって、Durand-Kerner 法が収束したならば、根の誤差上界が $O(\varepsilon_M)$ であるかないかにより、その根が単根か重根・近接根かを判別できることになる。

例 $P = (x-1)(x-0.5)^2(x-0.2)(x-0.1)^3(x+0.1)(x+0.3)(x+0.6)(x+0.7)(x+1)$
$P = 0$ を DKA 法で解いた場合の数値根とその誤差上界は以下である。

数値根	誤差上界
$x_1 = 1.0 + 6.9892417174226i \times 10^{-26}$	$4.5687730195968 \times 10^{-17}$
$x_2 = 0.49999999943258 - 0.000000002469049354 8955i$	$0.0000000686253705 07708$
$x_3 = 0.49999999768121 + 0.00000000131383195843 29i$	$0.0000000588166394 3024$
$x_4 = 0.2 + 1.8772219940818i \times 10^{-24}$	$1.36161454799 \times 10^{-16}$
$x_5 = 0.09999909626683 - 0.0000004200606074 5357i$	0.0000079238384679933
$x_6 = 0.100000812092505 - 0.00000057737865711055i$	0.0000088086156664535
$x_7 = 0.100000111696375 + 0.00000100099111736021i$	0.0000069488669111646
$x_8 = -0.1 - 3.4117107627346i \times 10^{-25}$	$4.9513242866064 \times 10^{-17}$
$x_9 = -0.3 + 1.2721150119997i \times 10^{-24}$	$3.6927706438334 \times 10^{-16}$
$x_{10} = -0.6 + 2.6459097352384i \times 10^{-23}$	$1.3442407502748 \times 10^{-14}$
$x_{11} = -0.7 + 1.2489317923373i \times 10^{-23}$	$7.2517218753707 \times 10^{-15}$
$x_{12} = -1.0 - 1.260411171906i \times 10^{-24}$	$1.00631954131092 \times 10^{-15}$

$\varepsilon_M \simeq 2.2\times10^{-16}$ ゆえ、誤差上界の値より x_2, x_3 と x_5, x_6, x_7 が重根で、他は単根 (ただし、x_{10} と x_{11} はやや近接しているが) であることが分かる。さらに、$\sqrt{\varepsilon_M} \simeq 1.5 \times 10^{-8}$, $\sqrt[3]{\varepsilon_M} \simeq 6 \times 10^{-6}$ ゆえ、x_2 と x_3 は 2 重根で x_5 と x_6 と x_7 は 3 重根であることが分かる。 □

以上の例から分かるように、単根と重根・近接根 (ただし十分に近接している近接根) は明確に判別できる。そこで、重根・近接根因子の積を G_0、残りの単根因子の積を H_0 と選べばよい。

例 上例の数値根を使って因子分離を行う。

$$G_0 = (x - x_5)(x - x_6)(x - x_7), \quad H_0 = (x - x_1)\cdots(x - x_4)(x - x_8)\cdots(x - x_{12})$$

とすると $\|P - G_0H_0\| = 0.0000000306112515 89857$ である。すなわち個々の根は P の根として十分正確であっても、G_0 と H_0 は P の因子としてはまだ誤差を含んでいることがわかる。そこで G_0 と H_0 を初期多項式として因子分離を行うと、反復は 2 回で停止し G_2 は次のようになる。

$$G_2 = x^3 - (0.3 - 8.3550577182807i \times 10^{-17})x^2 + (0.03 - 1.6709986603181i \times 10^{-17})x$$
$$-0.001 - 8.3549289882978i \times 10^{-19}$$

$$\|P - G_2H_2\| = 2.24610940884 \times 10^{-16}$$

4. 今後の課題

以上にみたように、本稿に述べた因子分離法は簡単でありながら非常に強力で、重根・近接根分離のみならず、多くの問題に有用であると思う。しかし重根・近接根分離に適用する場合、次のような問題が今後の課題として残っている。

1. 「近接根がある点の δ 近傍にまとまっており、他の根はそれから十分には離れている」との状況では、近似無平方分解により近接根がうまく分離できる。ところが、根が等比数列的に一点に近づくような場合、どの根までを近接根とするかの判定が難しい。

2. 高次多項式では、多くの根が狭い領域に分散することが多く、通常的に1.で述べた状況が生じる。
3. 正常でない多項式に対しては、正常な多項式に対する近似 GCD 算法や近似無平方分解算法をそのまま適用すると、とんでもない結果になることが多々ある。

参考文献

[1] 佐々木建昭, 近似的代数演算, 数理解析研究所講究録 676 号 (1988), 307-319.

[2] K. Shirayanagi: An algorithm to compute floating-point Gröbner bases, *Mathematical Computation with Maple V: Ideas and Applications* (Ed. T. Lee), Birkhäuser, pp.95-106, 1993.

[3] See *Proceedings of Workshop on Symbolic-Numeric Algebra for Polynomials*, INRIA, Sophia-Antipolis, France, July 1996

[4] T. Sakurai, H. Sugiura and T. Torii, *Numerical factorization of polynomial by rational Hermite interporation*, Numerical Algorithms, **3** (1992), 411-418.

[5] T. Sasaki and M. T. Noda, *Approximate square-free decomposition and root-finding of ill-conditioned algebraic equations*, J. Inform. Process., **12** (1989), 159-168.

[6] T. Sasaki and M. Sasaki, *Analysis of accuracy decreasing in polynomial remainder sequence with floating-point number coefficients*, J. Inform. Process., **12** (1989), 394-403.

[7] T. Sasaki, *A study of approximate polynomials II —properties of approximate factors—*, preprint of Univ. Tsukuba (April 1995), 25 pages, to be revised.

[8] B. T. Smith, *Error Bounds for Zeros of a Polynomial Based Upon Gerschgorin's Theorems*, J. ACM, **17** (1970), 661-674.